目　录

常微分方程，是一个有长期历史，而又正在不断发展的学科；是一个既有理论研究意义，又有实际应用价值的学科；是一个既得力于其他数学分支的支持，又为其他数学分支服务的学科；是一个表现客观自然规律的工具学科，又是一个数学可以为实际服务的学科．为了系统地介绍这一学科，我们准备以它的历史发展系统为线索，逐步展开对它的丰富内容的叙述．

按照它的主线的历史发展，可以划分为四个阶段，即：常微分方程创立及实域解析理论的阶段，常微分方程复域解析理论的阶段，常微分方程实域定性理论的阶段和常微分方程广泛深入发展的阶段．

一、常微分方程的创立及实域解析理论

三百年前，牛顿(I. Newton)和莱布尼兹(G. W. Leibniz)发明了微积分，同时也就开始了常微分方程的研究．现在我们用的微积分记号，便是莱布尼兹创造的．而最初将微积分应用于解决行星运动和月球运动的，则归功于牛顿．因此，常微分方程有着长期的历史．

牛顿力学的第二定律是指：动量随时间的变化率等于力；其数学表达形式便是常微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=\boldsymbol{F}, \tag{1}$$

这里m是质量，$\boldsymbol{r}$ 是位置向量，t 是时间，$\boldsymbol{F}$ 是作用于质点的力.

牛顿引力定律：引力与距离的平方成反比，与质量成正比；即

$$\boldsymbol{F}=-G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}, \tag{2}$$

这里 G 是万有引力常数，M 与 m 为互相吸引的两质点的质量，$\boldsymbol{r}$ 是由M点到 m 点的距离向量. 其中的“－”号表示吸引力. $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ 只表示方向，因其长度为 1.

将这两个定律合并在一起，就得到常微分方程

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)=-G\frac{Mm}{|\boldsymbol{r}|^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}. \tag{3}$$

这便是统治行星绕太阳、月球绕地球、人造卫星绕地球等等运动的常微分方程式.

将常微分方程(3)解出，可以得到开普勒(J. Kepler)由实测数据总结出来的行星绕日运动三定律，即：

i. 行星是在以太阳为焦点的一个椭圆轨道上运动.

ii. 行星到太阳的向径扫过的面积，与时间成正比.

iii. 行星周期 T 的平方与行星椭圆轨道的半长轴的三次方成正比.

这是常微分方程的实际应用的第一次历史性的胜

利．在牛顿的经典著作《自然哲学的数学原理》一书中，主要是研究形如(3)的方程在天文方面的各种应用．由此可见，常微分方程从一开始便紧密联系客观实际，并为当时的天文、航海等需要服务的．

常微分方程(3)的求解，可分两步．首先，可证其解在一个平面上（即初始位置向量和初始速度所决定的平面上），这是动量守恒的结果．因此，可以引入极座标(r, θ)．其次，引入变量$u=\frac{1}{r}$，则可以得到u对θ的二阶常系数线性常微分方程

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=GM\left(\frac{m}{K_\theta}\right)^2, \tag{4}$$

这里K_θ是系统的角动量，是一个常量．由此解出

$$\frac{1}{r}=u=u_0\cos(\theta-\theta_0)+GM\left(\frac{m}{K_\theta}\right), \tag{5}$$

这里u_0及θ_0为两个常数，由初始速度及位置之值而定．

这里立即可以看出，同一个微分方程，由于初始条件(位置与速度)不同，而可以有不同的解．事实上，九大行星和数以百计的小行星，都服从同一个微分方程(3)（取$M=M_日$太阳质量，并以太阳位置为原点），然而，它们的运动却各不相同．这是微分方程比代数方程更为复杂的一点．含足够多常数的解，称为通解．

微分方程一旦产生，便有数学家对它们的求解作系统的研究．十七世纪末和整个十八世纪对常微分方程的研究，便是寻求实域中各类型的方程的有明显表达形式的通解．下面是当时取得的一系列进展：

（一）可分离变量的方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y),$$

则可以化为积分

$$\int^{x} f(x)dx=\int^{y}\frac{dy}{g(y)}.$$

这样，即将求解微分方程问题化成求积分的问题.问题降了一级.

（二）齐次方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

引入新变量 $y/x=v$，则有

$$x\frac{dv}{dx}+v=f(v)$$

或

$$\frac{dv}{dx}=\frac{f(v)-v}{x}.$$

这是可分离变量的类型，立即可用（一）中之法求解.

（三）线性变系数方程.

设方程有形式

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x).$$

引入 $y=uv$，则有

$$v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=q.$$

利用 $\frac{dv}{dx}+pv=0$ 的可分离变量性，求出

$$v=e^{-\int^{x}p(x)dx},$$

即可由 $v\frac{du}{dx}=q$ 的可分离变量性，求出

$$u=\int^{x}\frac{q}{v}dx,$$

由此得出

$$y=e^{-\int^{x}p(x)dx}\int^{x}q(x)e^{\int^{x}p(x)dx}dx.$$

前面的一系列成果，主要是由莱布尼茨和伯努利家族(Bernoulli)取得的．

（四）伯努利方程．

伯努利家族进一步研究了形如

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{n}$$

的方程式（现在通称为**伯努利方程**）．他们利用了变换$u=y^{1-n}$，将上述方程化为线性方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)p(x)u=(1-n)q(x),$$

再利用(三)求解．

（五）黎卡提方程．

丹尼尔·伯努利研究过下面特殊形式的方程

$$\frac{dy}{dx}+y^{2}=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^{2}},$$

并对ν为非负整数时，求得两个特解：

$$y=y_{1}(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{d^{\nu}}{d(x^{2})^{\nu}}\left(\frac{e^{x}}{x}\right)\right),$$

和

$$y=y_{2}(x)=\frac{\nu+1}{x}+\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{d^{\nu}}{d(x^{2})^{\nu}}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)\right).$$

意大利数学家黎卡提(J. F. C. Riccati)曾研究过一般的最低次的非线性方程

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^{2}+B(x)y+C(x),$$

得到如下的求解办法：只要知道它的一个特解$y=y_1(x)$，则引入 $z(x)=y(x)-y_1(x)$，立即可有

$$\frac{dy_1(x)}{dx}=A(x)y_1^2(x)+B(x)y_1(x)+c(x).$$

故

$$\begin{aligned}\frac{dz(x)}{dx}&=\frac{d(y(x)-y_1(x))}{dx}\\&=A(x)(y^2(x)-y_1^2(x))+B(x)(y(x)-y_1(x))\\&=A(x)(y(x)-y_1(x))^2+(B(x)+2y_1(x))(y(x)-y_1(x))\\&=A(x)z^2(x)+(B(x)+2y_1(x))z(x).\end{aligned}$$

这又是一个伯努利方程，可以用积分求解.

如果知道它的两个特解$y=y_1(x)$及 $y=y_2(x)$，则由

$$\frac{d}{dx}\ln(y-y_1)=\frac{A(y^2-y_1^2)+B(y-y_1)}{y-y_1}=A(y+y_1)+B,$$

及

$$\frac{d}{dx}\ln(y-y_2)=\frac{A(y^2-y_2^2)+B(y-y_2)}{y-y_2}=A(y+y_2)+B,$$

可有

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{y-y_1}{y-y_2}=A(x)(y_1-y_2).$$

亦即通解可写成

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}=c\cdot e^{\int^x A(x)(y_1(x)-y_2(x))dx},$$

其中 C 是常数. 注意到右方只与 $A(x)$及 $y_1(x)$、$y_2(x)$有关，因此，如果还知第三个解 $y=y_3(x)$，则立即可得通解形式为

$$\left(\frac{y(x)-y_1(x)}{y(x)-y_2(x)}\right)\Big/\left(\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_2(x)}\right)=\text{常数}.$$

（六）阿贝尔方程.

由线性方程、黎卡提方程的研究，引起了沿这个方向的进一步的发展，这便是阿贝尔(N. H. Abel)研究的形如

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y^3+B(x)y^2+C(x)y+D(x)$$

及

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}$$

的方程(现在通称阿贝尔第一类和第二类方程).

注意到线性方程、伯努利方程、黎卡提方程的通解都具有下面的典型形式

$$G(x)\prod_{j=1}^{n}(y-y_j(x))^{\mu_j}=\text{常数}.$$

简称为“第一类显易解结构”. 对线性方程，$n=1$；对黎卡提方程，$n=2$(并有 $\mu_1+\mu_2=0$)；对伯努利方程，则为一般的整数 n. 因此，人们也想寻求阿贝尔第一类方程是否具有 $n=3$ 的第一类显易解结构，结果是：阿贝尔第一类方程要具有第一类显易解结构的充要条件为

$$(H+\alpha)\Phi\equiv 0,$$

其中

$$\Phi\equiv AD^2+\frac{1}{3}\left(D\frac{dC}{dx}-C\frac{dD}{dx}-BCD\right)+\frac{2}{27}C^3,$$

$$H\equiv\frac{1}{3\Phi^{5/3}}\left(\Phi\left((3DB-C^2+3\frac{dD}{dx}\right)-D\frac{d\Phi}{dx}\right),$$

α 为任意常数，但 $\alpha\neq 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$.

当 $\Phi\equiv 0$ 时，则化为伯努利方程，已知解型.

当 $\Phi\neq0$ 时，则 $H+a=0$，故 $H=-a\neq-3\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}$. 这时，代数方程

$$v^3-av+1=\prod_{j=1}^{3}(v-v_j)$$

有三个单根 v_1、v_2、v_3. 引入变量

$$y=\frac{3\Phi^{1/3}v-C}{3D},$$

则通解有

$$e^{-\int^x\frac{\Phi^{2/3}}{D}dx}\prod_{j=1}^{3}(v(x)-v_j)^{\lambda_j}=\text{常数},$$

这里

$$v(x)=\frac{3Dy(x)+C}{3\Phi^{1/3}},$$

$$\lambda_1=\frac{v_3-v_2}{\Delta},\quad \lambda_2=\frac{v_1-v_3}{\Delta},\quad \lambda_3=\frac{v_2-v_1}{\Delta},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_2v_3 & v_3v_1 & v_1v_2 \\ v_2+v_3 & v_3+v_1 & v_1+v_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

当 $a=3\left(\frac{1}{2}\right)^{2/3}$，则代数方程出现重根. 积分中出现对于重根 $v=v_1=2^{-\frac{1}{3}}$ 的指数因子，通解为下形

$$e^{-\int^x\frac{\Phi^{1/3}}{D}dx}\left[e^{-\frac{C_1}{v(x)-v_1}}(v(x)-v_1)^{C_2}\right](v-v_3)^{C_3}=\text{常数}.$$

其中 $C_1=-\frac{5}{9}2^{1/3}$, $C_2=-C_3=-\frac{2^{2/3}}{9}$; $v_3=2^{2/3}$. 这类出现指数的形式，称为“第二类显易解结构”.

阿贝尔第一类方程要具有显易解结构，必须满足条件

$$(\dot{H}+\alpha)\Phi\equiv 0.$$

因此，一般没有取得更多进展.

从第一类显易解结构

$$G(x)(y-y_1(x))^{\mu_1}(y-y_2(x))^{\mu_2}=\text{常数}$$

出现，当$\mu_1+\mu_2=0$，得出黎卡提方程；当 $\mu_1+\mu_2\neq 0$，则导致阿贝尔第二类方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A(x)y^2+B(x)y+C(x)}{y+D(x)}.$$

反过来，当阿贝尔第二类方程要"有显易解结构"，A、B、C、D 也必须有条件，即有一常数 λ，使

$$y=\frac{D\left[-\left(1+\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)AD+B+\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{dD}{dx}\right]-\left(1-\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)C}{2\frac{1-\lambda}{\lambda}AD-\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)\frac{dD}{dx}-\frac{1-\lambda}{\lambda}B}$$

是方程的一个解. 由此可见，一般没有这种解. 这样，沿这条路走下去，可能积出的类型越来越少了.

（七）雅可比方程.

有时，也偶然遇到一些很特殊的方程，而具有"显易解结构". 德国数学家雅可比(C.G. J. Jacobi)找到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(Ay+Bx+C)-(Dy+Ex+F)}{x(Ay+Bx+C)-(Gy+Hx+K)},$$

这里常数 A、…、K 形成的特征方程

$$\begin{vmatrix} D-\mu & E & F \\ G & H-\mu & K \\ A & B & C-p \end{vmatrix}=0$$

的三个根 μ_1、μ_2、μ_3 互不相等，则其通解为第一类显易解结构：

$$(a_{11}y+a_{12}x+a_{13})^{\mu_2-\mu_3}(a_{21}y+a_{22}x$$
$$+a_{23})^{\mu_3-\mu_1}(a_{31}y+a_{32}x+a_{33})^{\mu_1-\mu_2}=\text{常数};$$

如果 μ 有重根，则有第二类显易解结构.

求解析通解的工作，在常系数线性系统中，得到了完全的解决.

（八）常系数线性常微分方程

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m y}{dx^m}=0,$$

其中 a_m 为常数. 命 $y=e^{\lambda x}$，即得

$$\sum_{m=0}^{n} a_m\lambda^m=0.$$

由此解出 $\lambda=\lambda_1$、λ_2、…、λ_n，则方程之通解为

$$y=\sum_{m=1}^{n} C_m e^{\lambda_m x}.$$

如果某一根 λ_j 有重根，则对应的重根还有形如

$$e^{\lambda_j x}\sum_{k=0}^{h-1} d_k x^k$$

的 h 个解，h 为重次.

当方程是非齐次的，即

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m y}{dx^m}=f(x),$$

任取一根 λ，命 $y=e^{\lambda x}z(x)$，代入上方程，有

$$a_n e^{\lambda x}\frac{d^n z}{dx^n}+\cdots+z(x)\left(\sum_{m=0}^{n} a_m \frac{d^m e^{\lambda x}}{dx^m}\right)=f(x).$$

左方最后一项为

$$z(x)e^{\lambda x}\sum_{m=0}^{n} a_m\lambda^m=0,$$

故方程化为

$$a_n\frac{d^n z}{dx^n}+\cdots+b_0\frac{dz}{dx}=e^{-\lambda x}f(x).$$

以$\frac{dz}{dx}=u$,则

$$\sum_{m=0}^{n-1} b_m \frac{d^m u}{dx^m} = G(x)\,(=e^{-\lambda x}f(x)).$$

这样,方程右方已降了一阶,但仍为常系数线性常微分方程.由此可见,一定能用有限次运算,经过积分,得到非齐次方程的一个特解 $y=y_0(x)$.于是,通解即可写成

$$y=y_0(x)+\sum_{m=1}^{n} C_m e^{\lambda_m x}.$$

(九) 欧拉方程.

作为常系数线性常微分方程的一个变体,有如下形式:

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_ny=0.$$

欧拉 (L. Euler)引入变换 $x=e^t$,将上面的方程化为

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_ny=0,$$

又得到常系数线性常微分方程.

欧拉还第一个想到一般的常微分方程解的存在性问题,并提出一种数值方法来近似求解. 他所采用的办法,现在通称为**欧拉折线法**,即对常微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y);\quad x=x_0,\quad y=y_0$$

用公式

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,\ y_n)(x_{n+1}-x_n)\qquad (\text{其中 } n=0,1,2,\cdots)$$

逐次求解. 但是,严格的收敛性证明,则有待后一阶段才能完成.这个方法也只有在电子计算机出现以后,才真正得到广泛应用.

欧拉还发现了"积分因子"的概念，亦即对于常微分方程

$$M(x, y)dy + N(x, y)dy = 0,$$

如有函数 $J(x, y)$及 $F(x,y)$，使得

$$dF(x, y) = J(x, y)[M(x, y)dy + N(x, y)dy],$$

则 $J(x, y)$称为这个方程的**积分因子**．这个方程的通解便可写成

$$F(x,y) = \text{常数}.$$

（十）克勒罗全微分方程条件

特别，当 $J(x, y) = 1$ 时，克勒罗(A. C. Clairaut)得到：$F(x,y)$存在使

$$dF = M(x, y)dy + N(x, y)dy = 0$$

的充要条件为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

实域解析解的成果，大体上便是上述这些可积形式．这些成果在天文、力学等方面，已经取得了很多重要应用(包括二体问题的彻底解决)．但是，理论基础则有待于下一阶段来完成．

二、常微分方程复域解析理论

十九世纪初期，法国数学家柯西(A. L.Cauchy)建立了现代分析概念，并引入了复数域，数学得到了一次划时代的发展．

柯西将这一概念运用到微分方程，开创了常微分方程的解析理论这一分支.

给定一个复域的微分方程

$$\frac{dw}{dz}=f(w,\ z)=\sum_{0<l,m}{}' a_{l,m}z^l w^m,$$

方程右边的幂级数在 $|z|\leqslant r_1$、$|w|\leqslant \rho_1$ 中收敛. 要研究 $z=0$ 时，$w=0$ 的解析解 $w=\sum_{m\geqslant 1} b_m z^m$ 的存在性.

这里，问题的提法已经不是求有解析表达式的实域中的通解，而是求幂级数形式的复域中的特定的($w=0$, $z=0$)定解. 因此，这种问题又称**定解问题**，或**柯西问题**. 常微分方程中，通常称为**初值问题**，以别于“**通解问题**”和后面要提到的“**边值问题**”.

问题的解法分为两个步骤：

第一步，先形式地求出 b_m，不管这个级数的收敛性；第二步，确定一个半径，以保证其收敛性，完成解的存在性.

将 $w=\sum_{m\geqslant 1} b_m z^m$ 代入方程，比较 z 的同次幂：

$$\sum_{m\geqslant 1} b_m m z^{m-1}=\frac{dw}{dz}=\sum_{l,m\geqslant 0} a_{lm}z^l\left(\sum_{n\geqslant 1} b_n z^n\right)^m$$

$$=a_{00}+a_{10}z+a_{01}b_1 z+z^2+\cdots\cdots.$$

由此，有 z 的同次幂的系数关系为

$$b_1=a_{00},$$

$$2b_2=a_{10}+a_{01}b_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此即有关系，

$$b_n=P_n(a_{j,k}),\quad 其中\ j+k<n.$$

亦即 b_n 是 a_{jk}(其中 $j+k<n$)的多项式.这样,就形式地求出了 b_n. 注意这个多项式中的符号均为正,但 $a_{j,k}$ 则可能有负值,故 b_n 也可能有负值.

下面进行第二步,估计 $a_{j,k}$ 及 b_n 之大小.先估计 $a_{j,k}$ 的大小:设在 $|z|\leqslant r_1$、$|w|\leqslant\rho_1$ 中,

$$|f(w,z)|\leqslant M.$$

取 $z=r_1e^{i\theta}$、$w=\rho_1e^{i\varphi}$,

$$f(w,z)=\sum_{l,m\geqslant 0}a_{lm}(r_1e^{i\theta})^l(\rho_1e^{i\varphi})^m,$$

其共轭值

$$\bar{f}(w,z)=\sum_{l,m\geqslant 0}\bar{a}_{lm}(r_1e^{-i\theta})^l(\rho_1e^{-i\varphi})^m,$$

则求积分,有

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f\cdot\bar{f}d\theta d\varphi=(2\pi)^2\sum_{l,m\geqslant 0}|a_{lm}|^2r_1^{2l}\rho_1^{2m}.$$

这是利用

$$\int_0^{2\pi}e^{i(l_1-l_2)\theta}d\theta=2\pi\,\delta_{l_1l_2}=\begin{cases}0, & 当\ l_1\neq l_2;\\ 2\pi, & 当\ l_1=l_2.\end{cases}$$

另一方面,

$$f\cdot\bar{f}\leqslant M^2,\qquad 在\ |r|\leqslant r_1、|\rho|\leqslant\rho_1\ 中$$

故

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f\cdot\bar{f}d\theta d\varphi\leqslant(2\pi)^2M^2.$$

由此有 $\sum_{l,m\geqslant 0}|a_{lm}|^2r_1^{2l}\rho_1^{2m}\leqslant M^2$. 故得到

$$|a_{lm}|\leqslant\frac{M}{r_1^l\rho_1^m}.$$

取

$$A_{lm}=\frac{M}{r_1^l\rho_1^m},$$

则

$$|a_{lm}| \leqslant A_{lm}.$$

另一方面,

$$\sum_{l,m\geqslant 0} A_{lm} z^l w^m = \sum_{l,m\geqslant 0} M\left(\frac{z}{r_1}\right)^l \left(\frac{w}{\rho_1}\right)^m$$

$$= \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}.$$

亦是,我们可以来研究微分方程

$$\frac{dw}{dz} = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)}.$$

这个方程的形式解

$$w = \sum_{m\geqslant 1} b_m z^m$$

有关系

$$|b_m| \leqslant B_m.$$

故只要研究这个形式解的收敛区域,即可保证

$$w = \sum_{m\geqslant 1} b_m z^m$$

的收敛性.

这个微分方程可以分离变量,得到

$$\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)dw = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)} dz.$$

积分后,有 $w=0$、$z=0$ 之解为

$$\frac{w^2}{\rho_1^2} - 2\frac{w}{\rho_1} - \frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right) = 0.$$

两解中,取 $|w| \leqslant \rho_1$ 之解,则有

$$w = \rho_1\left\{1-\sqrt{1+\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)}\right\}.$$

这样，只要取$|z|$小，使得$1-\frac{\tilde{z}}{r_1}\neq 0$，以及

$$1+\frac{2Mr_1}{\rho_1}\ln\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\neq 0.$$

由前者，要求$|z|<r_1$；由后者，要求

$$|z|<r_1(1-e^{-\frac{1}{2M}\frac{\rho_1}{r_1}}),$$

故只要取

$$z_2=r_1(1-e^{-\frac{1}{2M}\frac{\rho_1}{r_1}}),$$

则可保证在 $|z|<z_2$ 中 $\sum_{m>1}B_mz^m$ 的收敛性，从而也保证 $\sum_{m>1}b_mz^m$的收敛性.

这样，我们就得到解析解的存在与唯一性. 因为b_m是唯一决定的.

这是对于正常点来说的. 当方程右方在这点出现奇性时，还将另行研究.

最简单的奇性，是下面的奇次方程

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\alpha w+\beta z}{\gamma w+\delta z},\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}\neq 0.$$

在 $w=z=0$ 点，方程右方为不定式. 这种点是“奇点”. 从解析理论的角度出发，对于这种奇点进行分类，有两种基本类型，即

$$\frac{dw}{dz}=A\frac{w}{z},$$

和

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w+\mu z}{z}. \qquad (\text{其中 } \mu\neq 0)$$

前者的通解为 $w=Cz^A$，后者的通解为

$$w=z(\mu\ln z+C).$$

其中C为任意常数．前者只取决于一个参数 Λ，后者只取决于一个参数 μ.

具体计算取决于

$$\begin{vmatrix}\alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda\end{vmatrix}\equiv\lambda^2-(\alpha+\delta)\lambda+(\alpha\delta-\beta\gamma)=0$$

的两个根 λ_1 及 λ_2.

第一种情形，$\lambda_1\neq\lambda_2$.

如果 $\beta=\gamma=0$,则 $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\delta$,

$$\Lambda=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\alpha}{\delta}.$$

已得典型形式.

如果 $\beta=0$,则 $\lambda_1=\alpha$, $\lambda_2=\delta$, $\alpha\neq\delta$.取变换

$$\xi=w、\qquad \eta=z+\frac{\partial}{\delta-\alpha}w,$$

则方程化为

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\lambda_1\xi}{\lambda_2\eta}.$$

如果 $\gamma=0$,则 $\lambda_1=\alpha$、$\lambda_2=\delta$、$\alpha\neq\delta$. 取变换

$$\xi=w+\frac{\beta}{\alpha-\delta}z,$$

则方程也化为

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\lambda_2\xi}{\lambda_2\eta}=\Lambda\frac{\xi}{\eta}.$$

当 $\beta\gamma\neq0$,则 $\lambda_1\neq\alpha$、$\lambda_2\neq\delta$,取变换

$$\xi=\gamma w+(\lambda_1-\alpha)z,$$
$$\eta=(\lambda_2-\delta)w+\beta z,$$

行列式

$$\begin{vmatrix} \gamma & (\lambda_1-\alpha) \\ (\lambda_2-\delta) & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta-(\lambda_1-\alpha)(\lambda_2-\delta)$$

$$= [\gamma\beta-(\lambda_1-\alpha)(\lambda_1-\delta]+(\lambda_1-\alpha)(\lambda_1-\lambda_2)$$

$$= (\lambda_1-\alpha)(\lambda_1-\lambda_2)\neq 0. \quad (\because \lambda_1\neq\lambda_2,\ \lambda_1\neq\alpha)$$

利用此变换，也得到

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\lambda_1\xi}{\lambda_2\eta}=\Lambda\frac{\xi}{\eta}.$$

第二种情形，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$.

当 $\beta\gamma=0$，则由

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta \\ \gamma & \delta-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)(\delta-\lambda)=0,$$

故 $\alpha=\delta=\lambda$，则方程右边的分子、分母各除以 λ，即得

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w}{z},$$

或

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w+nz}{z},$$

或

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{w}{z+nw}$$

的典型形式.

当 $\beta\gamma\neq 0$、$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，则$(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma=0$，故 $\alpha\neq\delta$、$\lambda\neq\alpha$、$\lambda\neq\delta$、$\lambda=\frac{\alpha+\delta}{2}$. 取变换

$$\xi=\gamma w+(\delta-\alpha)z,$$

$$\eta=\gamma w+\frac{(\delta-\alpha)}{\alpha}z,$$

则可将上方程化为

$$\frac{d\xi}{d\eta}=\frac{\xi+\frac{\delta-\alpha}{\delta+\alpha}\eta}{\eta},$$

即得典型形式.(注意 $\delta+\alpha\neq 0$,否则 $\lambda=0$, $\alpha\delta-\beta\gamma=0$.)

总之,当特征根不是重根时,得到

$$A=\lambda_1/\lambda_2\neq 1,$$

以及形如 $w=Cz^A$ 的通解;由 A 之值而定其类型. 当特征根是重根时,又有两种类型,即:

$$A=1,$$

$$W=Cz \quad 或 \quad W=z(\ln z+C).$$

依 $\beta=\gamma=0$ 或 β 及 γ 不全为零而定.

下面研究高次项对于通解形式的影响.设

$$\frac{dw}{dT}=\lambda_1 w+P(w, z),$$

$$\frac{dz}{dT}=\lambda_2 z+Q(w, z),$$

其中

$$P(w, z)=\sum_{\alpha+\beta>2} r_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta},$$

$$Q(w, z)=\sum_{\alpha+\beta>2} q_{\alpha\beta}w^{\alpha}z^{\beta}.$$

问题是:是否存在解析变换

$$w=\xi+\sum_{\alpha+\beta>2} u_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta},$$

$$z=\eta+\sum_{\alpha+\beta>2} v_{\alpha\beta}\xi^{\alpha}\eta^{\beta},$$

使上方程化为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi, \quad \frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta.$$

这样,即可看到高次项 P 及 Q 不影响通解的形式.

要决定 $u_{\alpha\beta}$ 的形式解,只须将级数代入方程,比较同次幂 $\xi^{\alpha}\eta^{\beta}$ 的系数,即有

$$\{(\alpha-1)\lambda_1+\beta\lambda_2\}u_{\alpha\beta}=已知,$$

$$\{\alpha\lambda_1+(\beta-1)\lambda_2\}v_{\alpha\beta}=\text{已知},$$
$$\alpha、\beta\geqslant 0,\quad \alpha+\beta\geqslant 2.$$

方程右边不一定为零，因此，要 $u_{\alpha\beta}$、$v_{\alpha\beta}$ 有解，一般要加上条件

$$(\alpha-1)\lambda_1+\beta\lambda_2\neq 0,\qquad \alpha\lambda_1+(\beta-1)\lambda_2\neq 0.$$

这样才可保证 $u_{\alpha\beta}$、$v_{\alpha\beta}$ 有唯一的形式解.

进一步，要保证收敛性.一般，将上述不等式加强到：存在一个正数 s，使

$$|(\alpha-1)\lambda_1+\beta\lambda_2|\geqslant S(\alpha+\beta-1),$$
$$|\alpha\lambda_1+(\beta-1)\lambda_2|\geqslant S(\alpha+\beta-1).$$

这样才可保证收敛性.

现在，如果将 λ_1 及 λ_2 看成复数平面上的两个点，则当 λ_1 及 λ_2 之联线不过原点时，可以取 S 作为由原点到此联线之垂线长，上面的条件即满足了. 特别，当 α、β、γ、δ 是实数，而 λ_1 及 λ_2 是复数时，便是这种情形.

如果 λ_1 与 λ_2 的联线不含原点，只要 λ_1/λ_2 及 λ_2/λ_1 不为正整数，这一条件也满足.

当 $\lambda_1=n\lambda_2$ 时(n 是整数，$n\geqslant 2$)，则可化为

$$\frac{d\xi}{dT}=\lambda_1\xi+\eta^n,$$

$$\frac{d\eta}{dT}=\lambda_2\eta.$$

得到积分

$$\xi=\frac{1}{\lambda_2}\eta^n(\ln\eta+C).$$

这时，高阶项对积分形式有了影响.

当 λ_1/λ_2 为负数时，情况较复杂.高阶项有影响. 特

别，当方程为实系数，$\lambda_1=i$、$\lambda_2=-i$ 时，有中心及焦点判定问题(这将在后面谈到).

总之，如 λ_1 与 λ_2 之联线不含原点，并且 λ_1/λ_2 及 λ_2/λ_1 不为正整数，则高阶无影响.

困难的问题在于研究全局性的结构. 最简单的周期函数 $w=\sin(z+c)$满足微分方程

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=1-w^2,$$

这是单周期的函数，即

$$w(z+2\pi)=w(z).$$

进一步，研究方程

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(1-w^2)(1-k^2w^2),$$

其中 $0<k<1$.

定义

$$K=\int_0^{+1}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

$$iK'=\int_{+1}^{+\frac{1}{k}}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}},$$

则可以证明 w 有两个周期，即 $4k$ 和 $2ik'$. 即

$$w(z+m4k+in2k')=w(z),$$

其中 m 及 n 为整数.

这样，可以在 Z 平面上，用 $z=4mk$ 及 $z=i2nk'$(其中 m、n 为整数)划分为长方形，每个长方形的对边可以看成同一条，因此，这些长方形又等价于环面. 另一方

面，$\frac{dw}{dz}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}$ 是双值的，为使其单值化，需要取两张 W 平面，由 $w=1$ 到 $w=\frac{1}{k}$ 及由 $w=-1$ 到 $w=-\frac{1}{k}$ 沿 x 轴剪开，再交叉接上，联成一张曲面，如果将 W 平面上的 ∞ 点看作一点，则可以看成是将两个球上各划两条割口，然后再交互接上，则得到一个环面．因此，可以看到，这是将 Z 平面变到 W 环面上的一种对应．对一个 z，有一个 w；对一个 w，则可有无穷多个 z 值，它们之间相差为两个周期之整倍数 $z+m4k+in2k'$．

一般地，可以研究在变换群 $\{T_n(z)\}$

$$T_n(z)=\frac{\alpha_n z+\beta_n}{\gamma_n z+\delta_n}\qquad (n=1,2,\cdots;\ \alpha_n\delta_n-\beta_n\gamma_n=1)$$

变换下不变的函数：

$$F(T_n(z))=F(z).$$

上面的 $w=\sin(z+c)$ 便是在 $\gamma_n=0$，$\alpha_n=\delta_n=1$，$\beta_n=\pm 2n\pi$ 的变换群下的不变函数．

例如，椭圆函数是在 $\gamma_n=0$、$\alpha_n=\delta_n=1$ 及 $\beta_n=b4k+iJ2k'$ 下的不变函数．

沿这个方向还可以推广．由

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=1-w^2,$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2=(1-w^2)(1-k^2w^2)$$

可以推广到一般的

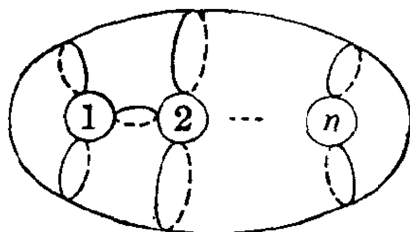
$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^2=(1-k^2w^2)(1-k_1^2w^2)\cdots(1-k_n^2w^2),$$

其中 $k_j^2 \neq k_l^2$,当 $j \neq l$ 时;$n=0, 1, 2, \cdots$.

取两张 W 平面,上面有 $2(n+1)$个分支点

$$\pm k_0, \ \pm k_1, \cdots, \pm k_n,$$

则用$(n+1)$条线将这些点两点一组相联，这些线互不相交. 将这两张W平面上的$(n+1)$条线割开，然而交互相联,使每个分支点都为两层的公共点. 这样得到的曲面，是一张有 n 个洞的封闭曲面(如下图).球面是 $n=0$，环面是 $n=1$.



这样,$w=w(z)$便是由 Z 平面变到有 n 个洞的W闭曲面上的函数.

$n=0$ 时,z 的基本定义区在 $0<x\leqslant 2\pi$ 中;$n=1$ 时,z 的基本定义区在 $0<x\leqslant 4k$, $0<y\leqslant 2k$.前者为一个无限长(y 方向)的带形,后者为一个长方形. 对于一般的 n (>1)，则为一个曲边的 $2(n+1)$边形，$2(n+1)$ 个内角之和为 2π.

这样,便得到在一特定的变换群$\{T_n(z)\}$下

$$W(T_n(z))=W(z).$$

亦即在这个群下，函数 $w(z)$之值不变，故称这个函数 $w(z)$为在变换群$\{T_n(z)\}$下的**自守函数**. 由此可见，自守函数实际上是柱面上的三角函数、环面上的椭圆函数在一般二维有向闭曲面上的推广.

设 z 的基本区域为 S_0，在 T_n 下变到 S_n; 并设在所有变换下 S_0 都只变到$|W|=1$ 之中,则

$$\sum_{k=0}^{\infty}(S_k)<\pi.$$

取 w 的有理函数 $H(w)$，其极点不在 $|w|=1$ 上，则作级数$(m\geqslant 2)$

$$\Theta(w;H,m)=\sum_{k=0}^{\infty}H(f_k(w))\left(\frac{df_k(w)}{dw}\right)^{2m},$$

可证明：在 $|w|=1$ 中，$\Theta(w)$只有极点；并且，由于

$$\frac{df_k(w)}{dw}=\frac{d}{dw}\frac{\alpha_k w+\beta_k}{\gamma_k w+\delta_k}=\frac{\alpha_k\delta_k-\beta_k\gamma_k}{(\gamma_k w+\delta_k)^2}=\frac{1}{(\gamma_k w+\delta_k)^2},$$

故

$$\Theta(f_j(w))=(\gamma_j w+\delta_j)^{2m}\Theta(w).$$

因此，如果取两个不同 H 的Θ作商，则有

$$\frac{\Theta(f_j(w);H_1,m)}{\Theta(f_j(w);H_2,m)}=\frac{\Theta(w;H_1,m)}{\Theta(w;H_2,m)}.$$

由此，便得到了一个自守函数. 这是庞卡莱(H.Poincare)对于椭圆函数的推广，这里的记号 Θ 也是由椭圆函数理论中引过来的，只不过在椭圆函数理论中是用平移 $w'=w+4k$ 及 $w'=w+2k'i$ 来作最基本的变换，产生平移群 $w'=w+4km+2k'in$，而这里则用 $w'=\frac{\alpha_n w+\beta_n}{\gamma_n w+\delta_n}$，$\alpha_n\delta_n-\beta_n\gamma_n=1$ 组成的群.

复域中的微分方程解析理论，与函数论有关. 微分方程和函数论相联系的结果很多，如贝塞耳(Bessel) 方程及贝塞耳函数，勒让德(A. M.Legendre) 方程及勒让德函数，黎曼(G. F. B. Riemann) 方程及黎曼-P 函数，高斯(C. F. Gauss)方程及超几何级数解等等. 这些，在物理及工程中经常会出现，有关结论可以在工具书中查到.

由于分析工具只限于在一点的附近才有效，因此，要研究大范围的解的性质，还有待常微分方程进一步的发

展.

在这个时期，在代数学方面取得了根本性的突破，这就是引入了“群”的概念，以及证明了五次以上的代数方程没有一般的根式解公式.平行于这两方面的成就，常微分方程也有了根本性的成果.

从正面来看，将代数方程

$$F(z) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \equiv a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) = 0$$

的根(z_1, z_2,…, z_k)组成置换群，即位置互换，但方程仍不变，法国青年数学家伽罗瓦(É. Galois)证明：这个代数方程有根式解的充要条件是这个根的置换群是可解的.

对于常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

有无限多个解 $F(x, y) = C$，这些解也可组成某种置换.这种置换也是无限多种.假设有变换

$$\frac{dx}{d\tau} = \xi(x, y), \quad \frac{dy}{d\tau} = \eta(x, y),$$

亦即有变换

$$x = x(\tau; x_0, y_0), \qquad y = y(\tau; x_0, y_0),$$

当(x_0, y_0)在一个解

$$F(x_0, y_0) = C_0$$

上时，要求

$$F(x(\tau; x_0, y_0), y(\tau; x_0, y_0)) = C(\tau)$$

对任一固定的 τ 也是一个解，挪威数学家李 (M. S. Lie)

证明：立刻可得出原来的微分方程的积分因子，具体地有

$$\frac{-1}{\begin{vmatrix} P(x, y) & Q(x, y) \\ \xi(x, y) & \eta(x, y) \end{vmatrix}}(Q(x, y)dx - P(x,y)dy) = d\Phi(x, y)$$

是全微分方程.例如,齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

或

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

在

$$x = x_0 e^{\tau}, \qquad y = y_0 e^{\tau}$$

变换下,解变到解.即在

$$\frac{dx}{d\tau} = x, \qquad \frac{dy}{d\tau} = y$$

变换下,解变到解.则

$$\frac{-1}{\begin{vmatrix} 1 & f\left(\frac{y}{x}\right) \\ x & y \end{vmatrix}} \cdot \left(f\left(\frac{y}{x}\right)dx - dy\right) = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)dx - dy}{f\left(\frac{y}{x}\right)x - y}$$

$$= \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dx}{x} - \frac{dy}{x}}{f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}} = \frac{dx}{x} + \frac{\frac{y}{x^2}dx - \frac{dy}{x}}{f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}}$$

$$= d\left(\ln x + \int \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}}\right) = d\Phi(x, y)$$

是全微分,其通积分即

$$\ln x+\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)}=\text{常数。}$$

又例如

$$\frac{dx}{dt}=-y+x(x^2+y^2-1),$$

$$\frac{dy}{dt}=x+y(x^2+y^2-1),$$

在旋转变换下，解变到解.即

$$\frac{dx}{d\tau}=-y,\quad \frac{dy}{d\tau}=x$$

下，解变到解. 则按李的理论，

$$\frac{-1}{\begin{vmatrix}-y+x(x^2+y^2-1), & x+y(x^2+y^2-1)\\ -y, & x\end{vmatrix}}((x+y(x^2+y^2-1))dx-(-y+x(x^2+y^2-1))dy)$$

$$=\frac{-1}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}((xdx+ydy)+(x^2+y^2-1)(ydx-xdy))$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)}-\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$$

$$=d\left[\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2-1}+\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]=d\Phi$$

$$=d\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)+\theta\right]=d\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)e^{2\theta}\right],$$

故通解为

$$\left(\frac{r^2}{r^2-1}\right)e^{2\theta}=\text{常数。}\qquad (x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$$

李的理论很简明，但是，困难在于变换群的微分方

程

$$\frac{dx}{d\tau}=\xi(x,y),\qquad \frac{dy}{d\tau}=\eta(x,\ y)$$

的求法，没有由 P、Q 求 ξ、η 的具体办法，因此，实际上遇到问题时还是困难的．一般，可用这个理论来整理已知的结果，可以看到它们是在什么群下的不变方程．

平行于五次代数方程没有一般的根式解的结果，刘维尔(J. Liouville)证明：如下特殊的黎卡提方程

$$\frac{dy}{dx}+y^2=1+\frac{\nu(\nu+1)}{x^2}$$

除了 ν 为非负整数 0，1，2，……时有前述的两特解，并可求通解外，对于其他的 ν，则一般没有初等解，亦即由这个方程经过有限次的初等运算(包括加、减、乘、除、乘方、开方、对数、指数、微分、积分)所得的解．

刘维尔的这一成果，从理论上结束了一般地去求非线性方程的通解的尝试．同时，为新的研究方向的诞生，起了推动作用．

虽然五次以上的代数方程没有一般的根式求解公式，但是，如果不求出解，人们仍然可以得到关于解的性质．一个重要的典型结果是：

实系数的代数方程

$$f(z)=\sum_{m=0}^{n}a_m z^m=0$$

在 $a\leqslant z\leqslant b$ 中有 n 个实根的问题，可以通过

$$f(a),\ f'(a),\ f_2(a),\cdots,\ f_n(a)$$

及

$$f(b),\ f'(b),\ f_2(b),\cdots,\ f_n(b)$$

的两系列的变号数之差来决定.这里,记

$$f(z)=f_0(z)、\qquad f'(z)=f_1(z),$$

则

$$f_m(z)=-f_{m-2}(z)+C_m(z-d_m)f_{m-1}(z),\text{ 其中 } m=2,3,\cdots,n.$$

$f_m(z)$的最高次为 $n-m$ 次.

这样,经过代数运算,不必去求解原方程,也可得到根的性质.这是斯图姆(J. Ch. F. Sturm)的著名成果.

应用类似的方法到常微分方程,斯图姆和刘维尔也得到许多类似的成果.例如,对方程

$$Lx\equiv(p(t)x')'+q(t)x=0$$

(其中 $a<t<b$, $p(t)>0$, p、p'、q 连续)

如果有两个独立的解

$$x=\varphi(t)\quad 及\quad x=\psi(t),$$

则 $\varphi(t)$及 $\psi(t)$的零点是交错的(亦即 $\varphi(t)$ 的相邻的两个零点中,必有 $\psi(t)$的零点);反之亦然.

例如

$$Lx\equiv x''+x=0,$$

则两个独立的解 $x=\sin x$ 及 $x=\cos x$ 的零点分别为 $n\pi$ 及$\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$,其中 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.它们是互相交错的.

证明 用反证法.设 $\varphi(t)$有两个相邻的零点 $t_1<t_2$. $a<t_1<t_2<b$. 如果$\psi(t)$在 t_1 及 t_2 中没有零点,则由于 φ 及 ψ 满足方程,故两方程各乘以 ψ 及 φ,相减,有

$$(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi=0.$$

$$0=\int_{t_1}^{t_2}[(p\varphi')'\psi-(p\psi')'\varphi]dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}d[p\varphi'\psi-p\varphi\psi']$$
$$=[p\varphi'\psi-p\varphi\psi']_{t_1}^{t_2}$$
$$=p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)-p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1).$$

由于 $p(t_2)$、$p(t_1)$同号；t_1 及 t_2 为 φ 之相邻的根，故 $\varphi'(t_1)$及 $\varphi'(t_2)$反号. 因此，$\psi(t_1)$及 $\psi(t_2)$只能反号. 由连续性，$\psi(t)$在 t_1 及 t_2 中有零点.

对于不同的两个方程，可以进行比较.设

$$L_1x\equiv(p(t)x')'+g_1(t)x=0,$$
$$L_2x\equiv(p(t)x')'+g_2(t)x=0$$

(其中 $a<t<b$, $p(t)>0$, $0<g_1(t)<g_2(t)$). 如果 $\varphi(t)$ 是 $L_1x=0$ 的解，$\varphi(t)$在 $t_1<t_2$ 有两个相邻的零点 $a<t_1<t_2<b$；而 $\psi(t)$是 $L_2x=0$ 的一个解，则 $\psi(t)$在(t_1, t_2)中必有一解.

证明 不妨设 $\varphi(t)>0$，当 $t_1<t<t_2$ 时. 用反证法. 设 $\psi(t)>0$，当 $t_1<t<t_2$ 时.

$$0=\psi L_1\varphi-\varphi L_2\psi$$
$$=\psi(p\varphi')'-\varphi(p\psi')'+(g_1-g_2)\varphi\psi,$$

故

$$0<\int_{t_1}^{t_2}(g_2(t)-g_1(t))\varphi(t)\psi(t)dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}[\psi(p\varphi')'-\varphi(p\psi')']dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}d[p(\varphi'\psi-\varphi\psi')]$$
$$=p(\varphi'\psi-\varphi\psi')\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$=p(t_2)\varphi'(t_2)\psi(t_2)-p(t_1)\varphi'(t_1)\psi(t_1)<0.$$

这是由于 $p(t_1)>0$，$p(t_2)>0$，$\varphi'(t_1)>0$，$\varphi'(t_2)<0$，$\varphi(t_2)>0$，$\varphi(t_1)>0$，故得出矛盾.

这里,我们可以看到:不求解，而只从方程本身的比较,即可得到解的若干性质.

由于物理问题的需要,这时出现了新型问题的提法,即由初值问题发展到边值问题.

[例] 弦的振动.例如两端固定的弦的振动. $u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

及初值

$$u(x,\ 0)=f(x),\qquad \left.\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),$$

及边值

$$u(0,\ t)=u(1,\ t)=0,\quad 当\ t\geqslant 0\ 时.$$

取

$$u(x,\ t)=X(x)\ T(t),$$

则有

$$\frac{\dfrac{d^2X(x)}{dx^2}}{X(x)}=\frac{\dfrac{d^2T(t)}{dt^2}}{T(t)}=\lambda=常数,$$

以及 $X(0)=X(1)=0$.

这样,便有了常微分方程的边值问题

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}-\lambda X(x)=0;$$

$$X(0)=X(1)=0,\quad 但X(x)\neq 0.$$

由此得到通解

$$X(x)=C_1\sin\sqrt{\lambda}\,x+C_2\cos\sqrt{\lambda}\,x.$$

要求 $X(0)=X(1)=0$，则 $0=C_2$ 及 $0=C_1\sin\sqrt{\lambda}$. 由此即得充要条件为 $\sqrt{\lambda}=k\pi$，其中 $k=\pm1, \pm2, \cdots$. 亦即 $\lambda=k^2\pi^2$，其中 $k=\pm1, \pm2$.

这时，有解

$$X(x)=\sin(k\pi)x.$$

由此可见，为了满足边界条件，λ 只能取特殊的值，即 $(k\pi)^2$，其中 $k=\pm1, \pm2, \cdots$这些离散的值，单调增加到无限大.并且，可以看到，

$$X_k(x)=\sin(k\pi)x \qquad (k=1, 2, \cdots)$$

在 $0<x<1$ 中有且只有$(k-1)$ 个根. 这种特殊的值 λ，称为方程的**特征值**；相应的解，称为**特征函数**. 当任一函数 $X(x)$满足 $X(0)=X(1)=0$ 时，还可以用这种特征函数之和来加以表示，即

$$X(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nX_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x.$$

所有这些性质，可以很容易推到一般的二次方程

$$(px')+(\lambda r-q)x=0,$$

其中 p'、r、q 是实连续函数，$a\leqslant t\leqslant b$；$p>0$，$q>0$. 以及一般的边界条件

$$x(a)\cos\alpha-p(a)x'(a)\sin\alpha=0,$$
$$x(b)\cos\beta-p(b)x'(b)\sin\beta=0,$$

λ 是参数，则存在无限个特征值

$$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots, \qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=+\infty;$$

其相应的解(即特征函数)有 $x_n(t)$，其中 $n=0, 1, 2, \cdots$,

则 $x_n(t)$在 (a, b) 中有且只有 n 个根. 满足边值条件的函数还可用这些特征函数加以表示，即

$$x(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n(t).$$

傅里叶级数便是这一类. 例如，取 $p=1$、$q=\pi^2$、$r=1$即可.

三、常微分方程实定性理论

前面已经谈过，一方面，求通解的可能性由于连最起码的非线性方程黎卡提方程都一般没有初等解析解，从而结束了这一方向上的努力；另一方面，不经过求解，从方程本身可以推出解的许多性质的可能性已经出现. 这样，常微分方程便已到了再上一层楼的阶段. 这一阶段终于到来了，这便是庞卡莱开创的实定性理论.

1881年起，庞卡莱写了著名的《微分方程定义的积分曲线》，他的思想是：由复域转回到实域；由解析研究转到定性研究；由函数研究转到曲线的研究；由等式转移到不等式；由小范围转到大范围；由数值的研究转到拓扑性质的研究；由定解转到曲线的全体研究，这就是实定性理论的实质.

庞卡莱在奇点附近的拓扑结构、奇点的大范围研究、极限环的存在性与唯一性、环面上的微分方程、空间周期解附近的情况等方面，作了系统的研究，这些成果如下：

奇点附近的情况.对于实域方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by, \qquad \frac{dy}{dt}=cx+dy,$$

则从其特征方程

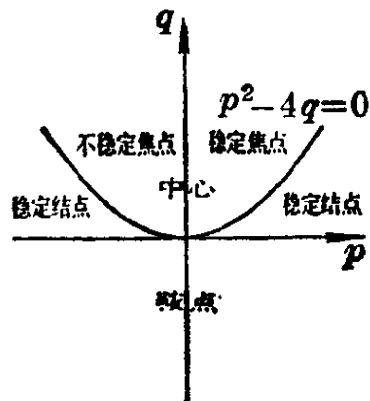
$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2+(-a-d)\lambda+(ad-bc)\equiv\lambda^2+p\lambda+q=0,$$

按 (p, q) 参数平面上的三条线：

$$q=0;\ p^2-4q=0;\ q>0 \text{ 中之 } p=0$$

将参数平面分为五部分，其拓扑特性如下：

$$q\neq 0\begin{cases} q<0\text{；鞍点} \\ q>0\begin{cases} p\neq 0\begin{cases} p^2-4q<0\text{；焦点}\begin{cases} p<0\text{，不稳定} \\ p>0\text{，稳定} \end{cases} \\ p^2-4q>0\text{；结点}\begin{cases} p<0\text{，不稳定} \\ p>0\text{，稳定.} \end{cases} \end{cases} \\ p=0\text{，中心} \end{cases} \end{cases}$$



其典型方程如下：

鞍点：$\dfrac{dx}{dt}=x, \quad \dfrac{dy}{dt}=-y.$

中心：$\dfrac{dx}{dt}=y, \quad \dfrac{dy}{dt}=-x.$

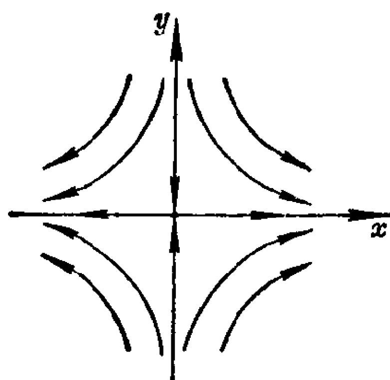
稳定焦点 $\dfrac{dx}{dt}=-x+y, \quad \dfrac{dy}{dt}=-x-y.$

不稳定焦点 $\dfrac{dx}{dt}=x+y, \quad \dfrac{dy}{dt}=-x+y.$

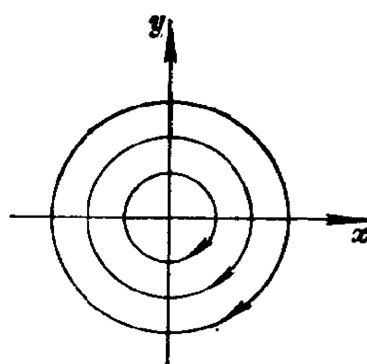
稳定结点 $\dfrac{dx}{dt}=-x, \quad \dfrac{dy}{dt}=-2y.$

不稳定结点 $\frac{dx}{dt}=x,\qquad \frac{dy}{dt}=2y.$

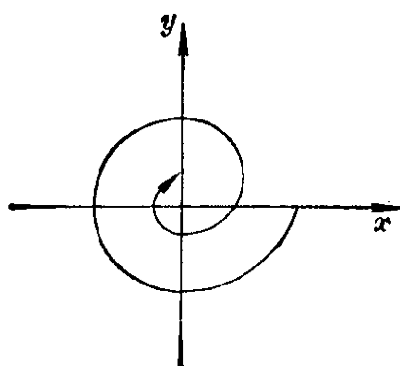
其图形分别为



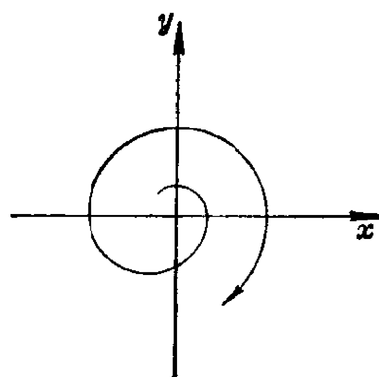
鞍点



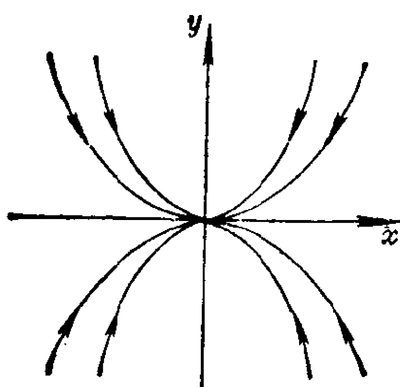
中心



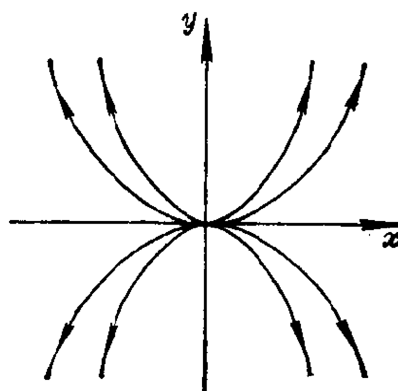
稳定焦点



不稳定焦点



稳定结点



不稳定结点

这里，曲线上的箭头指向，是 t 增加的方向.

这几个方程均可解析地积出，得到

鞍　　点：$x = x_0 e^t,\ y = y_0 e^{-t}$.

中　　心：$x = a\sin(t + t_0),\ y = a\cos(t + t_0)$.

稳定焦点：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 e^{-t},$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -t + t_0.$$

不稳定焦点：

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = r_0 e^{t},$$

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -t + t_0.$$

对这些初等奇点的拓扑性质作了分类之后，进一步是研究高次项对于这些奇点的拓扑性质的影响.

考虑方程组：

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + X(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy + Y(x, y),$$

其中 $X(x, y)$及 $Y(x, y)$ 是高次项. 用定性理论的方法，可以证明：上述五种情况中，除中心类型外，其他四类，高次项对于奇点附近的拓扑结构没有影响. 在分界线上，必须考虑高次项的具体情况，即分 $q = 0$；$q > 0$，$p = 0$；$q > 0$，$p^2 - 4q = 0$ 三类都要考虑高阶的影响. 例如$q > 0$，$p = 0$，这时高次项可以使系统成为中心，也可以使系统成为焦点，下面是两种例子：

［例 1］ $\dfrac{dx}{dt} = y + y(x^2 + y^2)$，　$\dfrac{dy}{dt} = -x - x(x^2 + y^2)$. 则

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2 = C.$$

故奇点(0,0)为中心型.

[例2] $\frac{dx}{dt}=y-x(x^2+y^2)$, $\frac{dy}{dt}=-x-y(x^2+y^2)$. 则

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=-2(x^2+y^2)^2, \qquad x^2+y^2=\frac{1}{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}+2t}.$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d}{dt}\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=-1, \quad \theta=\theta_0-t.$$

故

$$t\to+\infty,\ \theta\to-\infty, \quad x^2+y^2\to0.$$

故奇点(0,0)为焦点型.

对于高次项为解析形式(或多项式)时，有方法逐次区分它是中心还是焦点.如果高次项是二次式,则已有公式,由系数即可直接判定中心或焦点.当高次项是三次以上的情形,只有一些零星的具体结果.

对于 $q=0$ 的情形,这时主要要看高次项. 后面我们还将看到这类情形.

由奇点附近的情形转到全局情形，这里要引进一个"指数"的概念.

对于方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ y), \quad \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y)$$

的孤立奇点$(x_0,\ y_0)$,作一个小的闭曲线 C 将(x_0,y_0)包围,使其中除此奇点外,无其他奇点,当点$(x,\ y)$沿 C 反时钟方向运动一周，看向量 $(X(x,\ y),\ Y(x,\ y))$ 顺时钟或反时钟方向绕多少周,这个周数(顺钟为负，反钟为正)即此点的**指数**.以 $I(P)$记 P 点的指数.则有

$$I(P)=\frac{1}{2\pi}\oint_C d\theta=\frac{1}{2\pi}\oint_C d\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\oint_C\frac{(XdY-YdX)}{(X(x,y))^2+(Y(x,y))^2}.$$

对于初等奇点，$q\neq0$,这时有

$$I(P)=\frac{q}{|q|}=\begin{cases}+1,\text{当 } q>0 \text{ 时；}\\-1,\text{当 } q<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

即鞍点指数为 -1,其他中心、焦点、结点的指数为 $+1$.

对于正常点 (x_0, y_0)，即 $(X(x_0, y_0))^2+(Y(x_0, y_0))^2\neq0$,则 $I(x_0, y_0)=0$.

利用指数的这些性质，立即可以得到：一个周期解的内部必有奇点.

这个结论的证明很简单.以这个周期解作为 C,则沿 C 有 $I(C)=+1$. 因此，C 中不可能都是正常点，否则 $I(C)=0$了.

将指数概念应用于全局，例如研究地球，所有的纬线看作微分方程的积分曲线，则南极、北极各有一个中心，其指数均为1,故全局指数之和为2,所有的经度线看作微分方程的积分曲线，则南、北极各为一个结点，其指数均为1,故全局指数之和也为2.

一般，如地球上的等高线看作微分方程的积分曲线，也有各种奇点.将等温线、等压线进行研究，也是如此.

庞卡莱证明了：在球面上定义的微分方程（例如在 x-y 平面上，将无限远处看作一点，即可从拓扑学的角度看成一个球面)其所有奇点的指数之和为 2,即：

$$\sum_{\text{球面}} I(P)=2.$$

进一步,研究环面.例如,θ-φ 平面上,对于 θ 及 φ,均可将相差整数者看作同一个数,以 $[x]$表示 x 的整数部分,则可将 x 及 $x-[x]$看作同一个数.这样(θ, φ)便定义在

$$0 \leqslant \theta < 1, \qquad 0 \leqslant \varphi < 1$$

当中,也可用(mod.1)来表示,即

$$x \equiv x - [x] \pmod 1.$$

例如 1 与 0 看作同一数,1.1 与 0.1 看作同一数. 这样,$(\theta, \varphi) \pmod 1$ 便是在一个环面上. 随便考虑一个环面上的方程

$$\frac{d\theta}{dt} = 1, \quad \frac{d\varphi}{dt} = 1,$$

则其解为 $\theta - \varphi =$ 常数.因此,没有一个点是奇点.于是环面上所有奇点的指数和为0,亦即

$$\sum_{\text{环面}} I(P) = 0.$$

更进一步, 在有 n 个洞的二次闭曲面 M^2 上定义的微分方程,有指数和为 $2(1-n)$. 亦即

$$\sum_{M^2} I(P) = \chi(M^2) = 2(1-n).$$

这里球面 $n=0$,环面 $n=1$是特例. 记号 $\chi(M^2)$是欧拉-庞卡莱示性数.这个数又可以用下面的方法来定义,即将二次有向闭曲面 M^2 用三边形分割为若干小块,则

$$\chi(M^2) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

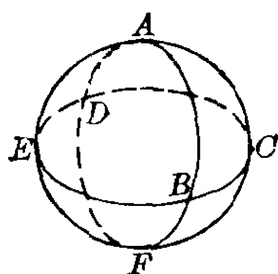
α_0 是点数, α_1 是线数,α_2 是面数.

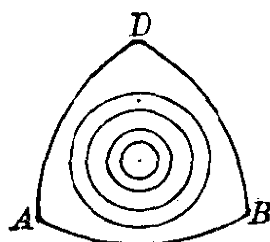
例如将球面用三张互相垂直的平面分割为 8 块球面三角形,这时有6个点 A、B、C、D、E、F, 12条边 AB、

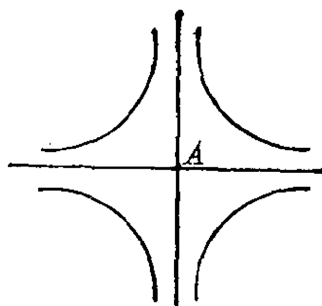
AC、AD、AE、BC、CD、DE、EB、FB、FC、FD、FE，和 8 个面 ABC、ACD、ADE、AEB、FBC、FCD、FDE、FEB. 即

$$\alpha_0 = 6, \quad \alpha_1 = 12, \quad \alpha_2 = 8.$$

χ(球面) $= 6 - 12 + 8 = 2$.







另一方面，可以定义一个球面上的微分方程，即将每块中心作一个中心，则这些顶点便成了鞍点. 由此可得到奇点指数之和

$$\sum_{\text{球面}} I(P) = 8 \times (+1) + 6 \times (-1) = 2.$$

上面的一般关系可以用微分方程的指数和来加以验证.

通过这个研究，庞卡勒一方面发展了常微分方程实定性理论，另一方面也开始了组合拓扑学的研究，因为这些性质只与闭曲面本身有几个洞有关，与分割方式、与微分方程的具体形式均无关. 由此，它只由闭曲面本身的拓扑结构所决定.

从具体的微分方程的研究引导出一般的组合拓扑学的研究，反过来又给以微分方程的性质以更明确的概括，这是一个很好的研究工作的范例.

在平面定性理论中，庞卡勒引进了一个很重要的概

念，极限环——孤立周期解.最简单的例子是方程组

$$\frac{dx}{dt}=-y-x(x^2+y^2-1),$$

$$\frac{dy}{dt}=x-y(x^2+y^2-1).$$

这个方程组只有一个实奇点 $x=y=0$，它是一个不稳定的焦点，但是，$x^2+y^2=1$ 是一个解，一个周期解. 注意到

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt}=-2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1),$$

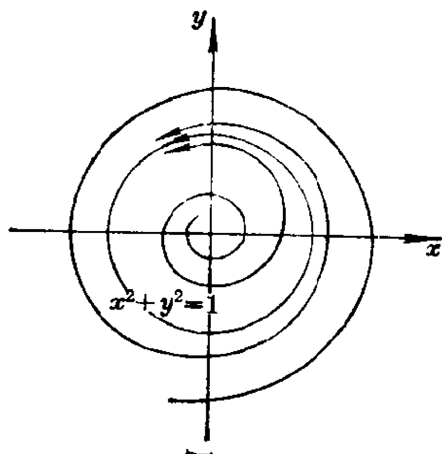
因此，对 $x^2+y^2=1$ 内的曲线，

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt}>0;$$

对 $x^2+y^2=1$ 外的曲线，

$$\frac{d(x^2+y^2)}{dt}<0,$$

它们都旋转地向 $x^2+y^2=1$ 无限接近(如图).



用极坐标，有

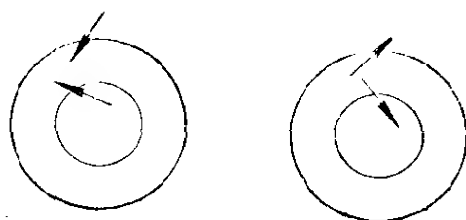
$$\frac{dr}{dt}=r(1-r^2),\quad \frac{d\theta}{dt}=1.$$

这种孤立的周期解，在平面定性理论中占了中心重要的位置.

类似于一个函数 $y=f(x)$的结论：如果 $f(a)\cdot f(b)<0$，且 f 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 中连续，则 f 在$[a, b]$中至少有一个零点；在微分方程中，也有类似的结论：设一个方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Y(x, y).$$

在一个平面环域的两边界上，积分曲线当 t 增加时的走向(由内向外，或由外向内)是反向的，又设环域内没有奇点，则环域内至少有一条极限环.



以前面的例子为例．取两个圆

$$c_1:\ x^2+y^2=2、\qquad c_2:\ x^2+y^2=\frac{1}{2},$$

则 c_1 及 c_2 中夹一个环域，这个环域中没有奇点

$$\left(\frac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\right).$$

在 c_1 上，$\left.\frac{d(x^2+y^2)}{dt}\right|_{c_1}=-2(2)(2-1)=-4<0,$

故积分曲线由外走向内.

在 c_2 上，$\left.\frac{d(x^2+y^2)}{dt}\right|_{c_2}=-2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{2}>0,$

故积分曲线由内走向外.

因此，不用积分，即可知在 $\frac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$ 中至少有一条极限环.

这种特殊性质的曲线，在工程技术中起了很重要的作用. 在无线电技术中出现的范德坡(**B.** van der **Pol**)方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0, \quad \varepsilon>0,$$

写成

$$\frac{dx}{dt}=y-\varepsilon\left(\frac{x^3}{3}-x\right), \qquad \frac{dy}{dt}=-x,$$

则在奇点(0,0)附近

$$\begin{vmatrix} \varepsilon-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\varepsilon\lambda+1=0,\quad \varepsilon>0.$$

故 $p=-\varepsilon<0$,故(0,0)是不稳定的奇点，积分曲线由奇点附近向外走.

在∞点处,用变换

$$\xi=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad \eta=\frac{y}{x^2+y^2},$$

再引入极座标

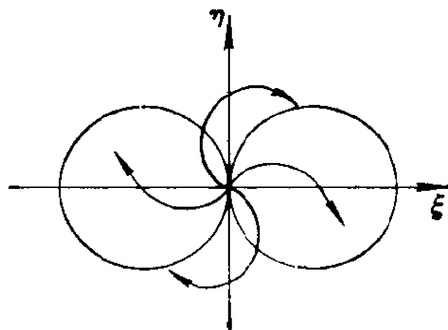
$$\xi=r\cos\theta,\qquad \eta=r\sin\theta,$$

则可以有方程组

$$r\frac{dr}{dt}=\varepsilon\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta-r^2\right)\cos^2\theta,$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{\varepsilon}{3}\sin\theta\cos^3\theta-(\varepsilon\sin\theta\cos\theta+1)r^2.$$

注意到 $\frac{1}{3}\cos^2\theta-r^2=0$ 是切于 η 轴的两个圆(如右图所示). 在这两个圆中,积分曲线由奇点向外走,而在两圆之外,



$$r^2>\frac{1}{3}\cos^2\theta.$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-(\varepsilon\sin\theta\cos\theta+1)+\frac{\varepsilon}{3}\frac{\sin\theta\cos^3\theta}{r^2}.$$

注意到这时 $\theta\sim\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3}{2}\pi$，故 $\frac{d\theta}{dt}\sim-1$.

因此,积分曲线不能在圆外走入 $\xi=\eta=0$. 由此得到,无

限远点是不稳定的奇点.

这样,原点(0,0)附近的积分曲线向外走，无限远处的奇点的积分曲线向有限处走，当中没有其他奇点. 因此,一定存在极限环.

并且,不经过积分,还可定性地证明只有一条极限环,它是稳定的,亦即其他积分曲线都向这条线不断逼近.

这个性质在技术上很有用. 例如无线电发射电磁波希望得到稳定的波长和频率,但初始时有干扰,利用稳定极限环的存在,每秒钟这些曲线绕原点百万次,因此很快就到达这个稳定周期解上.

关于极限环，还有许多问题需要研究. 典型的问题是:如果方程右边是不高于 n 次的多项式

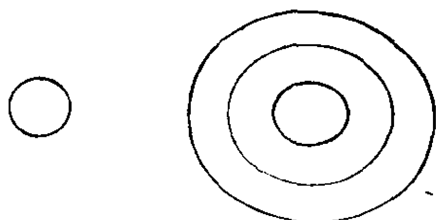
$$\frac{dx}{dt}=X_n(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}=Y_n(x,\ y),\tag{E_n}$$

则最多有几个极限环 $N(n)$，并且它们之间的相互位置如何?

现在已知的是:当 $n=2$,则最多数为

$$N(2)=4;$$

并且,它们的相对位置为(1,3)结构,即如下形:



在二次有向闭曲面 M^2 上,没有奇点时,M^2 必为环面.因此,环面上的微分方程是值得单独研究的. 在现实生活中,地球绕太阳,月球绕地球运动，由于月球所在的

平面白道平面与地球所在的平面黄道平面有一个5°的夹角，不是一张平面，因此，从太阳看月球，便是在一个环面上运动.

环面上没有奇点的方程，最简单的是：

$$\frac{d\theta}{d\varphi}=\mu\ (\text{常数})\quad (\text{mod}\ 1).$$

如果 μ 是有理数 $=\frac{p}{q}$，其中 p、q 为整数，则 $\theta-\theta_0=pk$、$\varphi-\varphi_0=qk$（其中 k 为整数）时，有

$$\theta-\theta_0\equiv 0,\quad \varphi-\varphi_0\equiv 0\ (\text{mod}\ 1).$$

即 (θ,φ) 回到初始值 (θ_0,φ_0). 因此，所有的解都是周期解.

如果 μ 是无理数，则对任何数 k，

$$\theta-\theta_0=\mu k,\qquad \varphi-\varphi_0=k.$$

当 μk 为整数 n 时，$k=\frac{n}{\mu}$ 为无理数. 因此，$\varphi-\varphi_0=k$ 有 $\varphi-\varphi_0\neq 0(\text{mod}\,1)$，故 (θ,φ) 永远不会回到 (θ_0,φ_0). 亦即不存在周期解. 当 $\mu=$ 无理数，还可以证明：在任何环面上的点的任何邻近，任何解都无限次通过它，从概率统计学看来，这叫做“各态历经”.

对于一般的环面方程

$$\frac{d\theta}{dt}=\Theta(\theta,\varphi),\quad \frac{d\varphi}{dt}=\Phi(\theta,\varphi)\quad (\text{mod}\ 1),$$

如果不存在奇点，即

$[\Theta(\theta,\varphi)]^2+[\Phi(\theta,\varphi)]^2\neq 0$，对所有 (θ,φ). 则对于任一个解，均有同一极限：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\theta(t)}{\varphi(t)}=\mu(\text{常数})。$$

μ 只与方程有关.

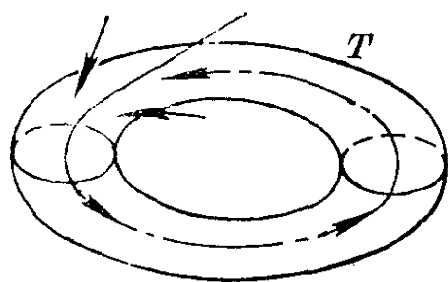
并且，可以证明：周期解存在的充要条件是 μ 为有理数.

环面已经是在三维空间了，因此，研究也就转向三维空间.

下面是一个关于三维空间中周期解的存在性定理：如果方程组

$$\frac{dx}{dt}=X(x,\ y,\ z),\quad \frac{dy}{dt}=Y(x,\ y,\ z),\quad \frac{dz}{dt}=Z(x,\ y,\ z)$$

存在一个(x,y,z)空间中的环面 T，积分曲线均由 T 外穿入 T 内(或由 T 内穿出 T 外)，并且积分曲线都在 T 内旋转，T 中无奇点，如图. 则环面内必然存在周期解.



在一个周期解附近，积分曲线的性质可能很复杂. 为了研究它，可以把座标原点搬到周期解上，取垂直于周期解的面作为(ξ,η)平面，则在周期解附近，有方程

$$\frac{d\xi}{dt}=A(\xi,\ \eta;\ t),\qquad \frac{d\eta}{dt}=B(\xi,\ \eta;\ t).$$

A、B 对于 t 是周期函数，$\xi=\eta=0$ 时 $A=B=0$. 不妨设周期为 2π.对于最简单的线性方程组

$$\frac{d\xi}{dt}=a(t)\xi+b(t)\eta,\qquad \frac{d\eta}{dt}=c(t)\xi+d(t)\eta.$$

取初值 $\xi=1$、$\eta=0$，及 $\xi=0$、$\eta=1$，经过 t 由0变到 2π，得到 $\xi=\alpha$、$\eta=\beta$ 及 $\xi=\gamma$、$\eta=\delta$ 这样，便得到一个矩阵

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

可以作一个特征方程

$$\begin{vmatrix} \alpha-e^{\lambda 2\pi} & \beta \\ \gamma & \delta-e^{\lambda 2\pi} \end{vmatrix}=0.$$

注意，这时 $\alpha\delta-\beta\gamma>0$.

或者写成

$$\begin{vmatrix} \alpha-S & \beta \\ \gamma & \delta-S \end{vmatrix}=S^2+PS+Q=0.$$

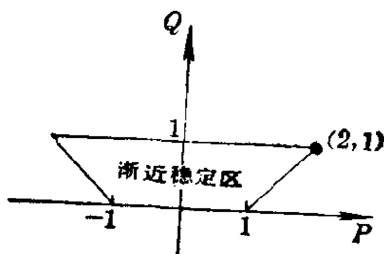
则当两根 S_1 及 S_2 有 $|S_1|<1$、$|S_2|<1$ 时，这个周期解是稳定的，即其附近的积分曲线当 $t\to+\infty$ 时，向它逼近. 只要有一个 $|S_j|>1$，则这个周期解是不稳定的，即其附近有积分曲线，当 $t\to+\infty$ 时离开它.

故渐近稳定的参数域在四条直线所界定：

$$Q=0, \quad Q=1, \quad P-Q-1=0, \quad P+Q+1=0.$$

或用不等式：

$$0<Q<1,\ P-Q-1<0,\ P+Q+1>0.$$



我们已经接触到运动稳定性的问题. 这方面系统的工作，由苏联数学家李雅普诺夫(A. M. Ляпунов)开始，设有一个方程组

$$\frac{dx_j}{dt}=X_j(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n;\ t), \qquad (j=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

它的一条解曲线 C_0：

$$x_j = x_j^{(0)}(t;\ x_{10},\ x_{20},\cdots,\ x_{n0}),$$

$t=0$ 时有 $x_j^{(0)}(0;\ x_{10},\cdots,x_{n0}) = x_{j0}$.

如果对于任何正常数 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当初始值

$$(x'_{10},\ x'_{20},\cdots,\ x'_{n0})$$

与初始值

$$(x_{10},\ x_{20},\cdots,\ x_{n0})$$

的距离小于 δ，即

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_{j0}'-x_{j0})^2}<\delta$$

时，便可以保证：$t>0$ 时，相应的解与 C_0 的距离

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j(t;\ x'_{10},\ x'_{20},\cdots,\ x'_{n0})-x_j^{(0)}(t;\ x_{10},\ x_{20},\cdots,x_{n0}))^2}<\varepsilon.$$

则称 C_0 所定义的运动是**稳定的**；否则，称 C_0 为**不稳定**.如果 C_0 稳定，并且还有条件

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j(t;\ x'_{10},\cdots,x'_{n0})-x_j^{(0)}(t;\ x_{10},\cdots,x_{n0})^2)}=0,$$

则称 C_0 所定义的运动是**渐近稳定的**.

下面是一些主要的结果：对于常系数系统

$$\frac{dx_j}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k, \qquad (j=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

作特征方程

$$|(a_{jk})-\lambda\delta_{jk}|=0. \qquad \left(\delta_{jk}=\begin{cases}1, & 当\ j=k\ 时;\\ 0, & 当\ j\neq k\ 时\end{cases}\right)$$

如果所有的 λ 的实部为负数

$$\mathrm{Re}(\lambda_j)<0, \qquad (j=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

则零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是渐近稳定的.

如果至少有一个 λ 的实部为正数,

$$\mathrm{Re}(\lambda_j)>0,\quad 对某一个\ j,$$

则零解 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 是不稳定的.

对于线性项后再加上高次的非线性项，这个结论仍然不变.

当所有 $\mathrm{Re}(\lambda_j)\leqslant 0$,但有某个 $\mathrm{Re}(\lambda_k)=0$，这时称为“临界情形”. 例如 $n=2,\lambda_1=i,\lambda_2=-i$. 这时,前面已讲过,这是中心和焦点的判定问题.

最简单的情形是：$n=2$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2<0$. 这时，依高阶项的性质,而可分为四类. 以下面的方程为例

$$\frac{dx}{dt}=ax^m,\quad \frac{dy}{dt}=-y.\quad m>1.$$

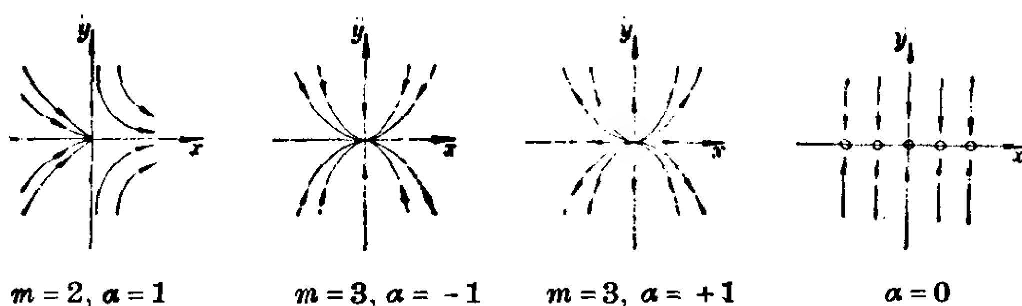
这组方程 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1<0$. 它是临界情形. 这组方程可以积分,得到

$$x=\frac{1}{\left(\frac{1}{x_0^{m-1}}+a(1-m)t\right)^{\frac{1}{m-1}}},\quad y=y_0e^{-t}.$$

这里,分四种类型：

$$\begin{cases} a\neq 0\begin{cases} m=偶数,不稳定(或部分不稳定); \\ m=奇数\begin{cases} a<0,渐近稳定; \\ a>0,不稳定; \end{cases} \end{cases} \\ a=0\quad 稳定,但不是渐近稳定. \end{cases}$$

下面是四种情形示意图：



$m=2, \alpha=1$ $m=3, \alpha=-1$ $m=3, \alpha=+1$ $\alpha=0$

这里也可见到高阶奇点的复杂性.

李雅普诺夫发展了一套方法，来处理运动稳定性.常见的是李雅普诺夫函数法，其几何学实质类似于庞卡莱的无切环线，即曲线均向内穿入的环线，其物理实质来源于系统的总能量.例如，二阶振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=0,$$

不去求解特征根，而只研究系统的总能量

$$E=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

则当 E 对 t 微分，有

$$\frac{dE}{dt}=x\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\leqslant 0,$$

故 E 不增加. 因此，将系统写成

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x-y,$$

则 $(x, y)=(0, 0)$便是稳定的. 这时，取 $\varepsilon=\delta$ 即可.

对于线性方程，人们可以求解；而对于非线性振动，例如

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^3+x=0,$$

便不能求解了.但是，利用李雅普诺夫的办法，立即可以

作同样的函数，这时

$$\frac{dE}{dt}=x\frac{dx}{dt}+\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\left(\frac{dx}{dt}\right)^4\leqslant 0,$$

仍然可得出稳定的结论，这就显示出李雅普诺夫函数的优越性.

这方面，结合近代的自动控制理论，得到了重大的发展.

四、本世纪常微分方程的重大发展

常微分方程不断受到提出的实际问题的挑战，同时，也不断创造新的理论和开拓新的领域.

最初是三体问题的挑战.研究日、地、月三体互相吸引，每个体有三个位置座标(x_i, y_i, z_i)及三个分速度$(\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$(其中$i=1, 2, 3$)，共有18个变量；每个体有三个二阶方程，例如，对$i=1$，有

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{(x_2-x_1)}{r_{12}}-G\frac{m_1m_3}{r_{13}^2}\frac{(x_3-x_1)}{r_{13}},$$

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}.$$

可化为两个一次微分方程，即

$$\frac{dx_1}{dt}=\dot{x}_1,$$

$$m_1\frac{d\dot{x}_1}{dt}=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}^2}\frac{(x_2-x_1)}{r_{12}}-G\frac{m_1m_3}{r_{13}^2}\frac{(x_3-x_1)}{r_{13}}.$$

这18个方程有十个已知的代数积分，即总能量守恒，三个

方向的动量守恒，及六个角动量守恒的关系．除此而外，至今还没有发现其他的已知关系．这样，到今天为止，仍然是一个理论上的挑战．

虽然还不能正面解决，但却带动出“动力系统”这一新的分支．例如人们可以不经积分，证明：如果只考虑日、地、月三体，则可以断定，以后月球不会由地球的卫星变成太阳的行星，这是非常有趣的定性结论．

除了定性理论的发展外，近似解析解的理论也在发展．考虑到太阳的质量是地球的质量的 3.3×10^5 倍，因此，可看作太阳不动，地球绕太阳运动，而月球的质量只有地球的质量的1/81，因此，研究月球只能看作绕地球转．这样，以质量之比，可以看成“小参数”．因此，将解展成小参数的幂级数，零级近似即不要小参数项，解出后，再加上小参数项的影响，这样便得到解析形式的但又是近似的解．

例如，研究范德坡方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0,\quad 0<\varepsilon\ll1.$$

ε 为小参数．则零级近似是将 $\varepsilon=0$，即有

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0.$$

其解为下面的形式：

$$x(t)=A\sin x=A\sin(t+\varphi).$$

当 A 固定时，

$$\frac{dx}{dt}=A\cos x.$$

下面研究 ε 对 A 及 x 的影响. A 及 x 为 t 之函数,则

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{dA(t)}{dt}\sin x+A\left(1+\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos x.$$

两个 $\frac{dx(t)}{dt}$ 相比,近似地有关系

$$\frac{dA(t)}{dt}\sin x+A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos x=0.$$

另一方面,对 $\frac{dx}{dt}=A\cos x$ 再微分,有

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dA}{dt}\cos x-A\left(1+\frac{d\varphi}{dt}\right)\sin x.$$

但方程有

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}-x\\&=-\varepsilon(A^2\sin^2x-1)A\cos x-A\sin x,\end{aligned}$$

即得关系

$$\frac{dA}{dt}\cos x-A\left(1+\frac{d\varphi}{dt}\right)\sin x=-\varepsilon(A^2\sin^2x-1)A\cos x-A\sin x$$

与

$$\frac{dA}{dt}\sin x+A\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)\cos x=0.$$

合并,解出

$$\frac{dA}{dt}=-\varepsilon A(A^2\sin^2x-1)\cos^2x,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\varepsilon(A^2\sin^2x-1)\cos x\sin x.$$

右方含有 $A(t)$ 及 $x(t)$, 是 t 之函数. 在 t 由0到 2π 中积分,设 $A(t)$基本上不变,即近似地有

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}-A(A^2\sin^2 x-1)\cos^2 x\,dx=\frac{\varepsilon}{2}A\left(1-\frac{A^2}{4}\right).$$

$A=0$ 及 $A=2$ 是两解，前者为奇点，后者为周期解的近似位置.对 A 求积分，有

$$A(t)=\frac{A_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left[1+\frac{1}{4}A_0^2(e^{\varepsilon t}-1)\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

当 $A_0\neq 0$ 时，

$$\lim_{t\to+\infty}A(t)=2.$$

对于 φ，近似地也有

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{2\pi}(A^2\sin^2 x-1)\cos x\sin x\,dx=0.$$

即 $\varphi=\varphi_0$(常数). 因此，近似地有解析形式的解

$$x(t)\cong A_0\frac{e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left[1+\frac{1}{4}A_0^2(e^{\varepsilon t}-1)\right]^{\frac{1}{2}}}\sin(t+\varphi_0),$$

这是由 A_0 及 φ_0 两任意常数表示近似的通解.

这方面的工作正在大发展，包括大参数及小参数的研究.这些研究都和非线性振动的研究相联系，并正在发展.

另一个重大的应用领域是控制理论.在这方面，出现了许多新的研究.例如依靠反馈来实现控制，则一切反馈都必含有时间滞后现象.这是因为，一切信息传送都要时间，所以瞬时传递只是一种简化.最简单的反馈系统是

$$\frac{dx(t)}{dt}=ax(t)+bx(t-\tau),\quad \tau>0.$$

这里 τ 是时间滞后.如果不计它,则有方程

$$\frac{dx(t)}{dt}=(a+b)x(t).$$

只要 $a+b<0$,则系统便是稳定的.但是,如果考虑 τ,则这个结论不一定成立.以

$$x=e^{\lambda t}$$

代入有时滞的方程,则得到

$$\lambda=a+be^{-\lambda\tau}.$$

这是一个 λ 的超越方程.都乘以 λ,并命

$$A=a\tau、\qquad B=b\tau,$$

则有

$$\lambda\tau=A+Be^{-\lambda\tau}.$$

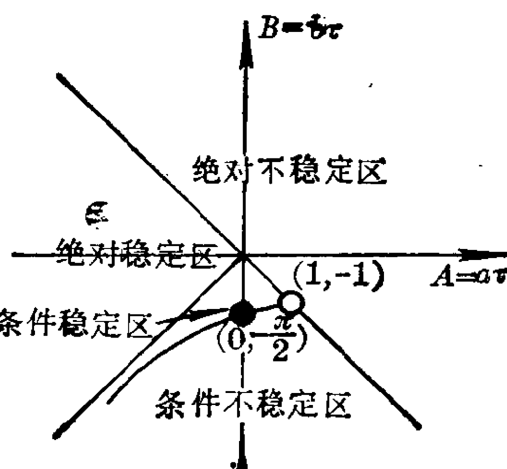
当 $\lambda\tau=iy$、y 为实数,则有

$$iy=A+Be^{-iy}=A+B\cos y-iB\sin y,$$

即 $A+B\cos y=0$, $y=-B\sin y$, 得到 A 及 B 用 y 作参数的表示式

$$A=\frac{y}{\operatorname{tg}y},\quad B=-\frac{y}{\sin y}.$$

当 y 由 0 变到$\frac{\pi}{2}$, 再变到 π,(A, B)由$(1,-1)$变到 $\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$,变到$(-\infty,-\infty)$. 这是条件稳定与条件不稳定的分界线, 而 $A+B=0$, 则是绝对稳定与绝对不稳定的分界线 (如图). 由此可见, 当 $A+B<0$ 时,有三种情形:



$a^2 \geqslant b^2$，则对任何 $\tau > 0$，系统为稳定。

$a^2 < b^2$，则要看 τ 的大小，分界线在

$$\tau = \frac{1}{(-b)} \frac{\cos^{-1}\left|\frac{a}{b}\right|}{\sin\cos^{-1}\left|\frac{a}{b}\right|}. \qquad (b<0)$$

因此，当 $|a| < -b$ 因而 $a+b<0$ 时，要看 τ 的大小来决定系统的稳定性. 最初的火箭设计中，没有考虑 τ 的作用，因而产生了燃烧不稳定的现象，使得人们必须考虑 τ 的存在.

这类问题引起了泛函微分方程的研究，并正在发展.

实际物理及工程问题中，数学模型常有省略或参数不准的问题，因此，要求建立的方程本身的结构是稳定的，也就是要求方程系数本身的微小变动，方程解的性质不要发生质变. 以最简单的振动方程为例，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = 0, \quad p>0,\ q>0.$$

p、q 为常数时，这个系统是渐近稳定的. 可以进一步证明，当 p 及 q 微小变化，仍然如此. 亦即：存在一个小正数 $\varepsilon = \varepsilon(p, q) > 0$，使得，当

$$\left|\frac{p(t)-p}{p}\right| < \varepsilon、\quad \left|\frac{q(t)-q}{q}\right| < \varepsilon$$

时，

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + p(t)\frac{dx(t)}{dt} + q(t)x(t) = 0$$

的零解 $x = \dot{x} = 0$ 是渐近稳定的. 这便是结构稳定性. 这

方面的工作正在发展.

从理论方面看，常微分方程经历过实域解析理论、复域解析理论、实域定性理论三个阶段后，现在又在向复域定性理论方面发展. 这是因为，许多研究表明，若干根本性的规律是在复域(例如 n 次代数方程有 n 个根是在复域中成立的). 这就促使人们研究复域. 对于实方程组

$$\frac{du}{dt}=U(u,x),\quad \frac{dx}{dt}=X(u,x), \tag{E}$$

自然扩充到复域，即命

$$w=u+iv,\quad z=x+iy,\quad T=t+i\tau,$$

则方程可自然扩充到

$$\frac{dw}{dT}=U(w,z),\quad \frac{dz}{dT}=X(w,z). \tag{E*}$$

这时，(u,x)平面的曲线族

$$f(u,x)=c$$

便自动扩充到

$$f(w,z)=c_1+ic_2,$$

即(u,v,x,y)四维空间中的二维曲面族

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(f(w,z))=c_1,\\ \mathrm{Im}(f(w,z))=c_2.\end{cases}$$

由四维空间二维曲面族的研究来看实平面 (u,x) 上的截迹.

以最简单的有极限环的方程为例：

$$\frac{du}{dt}=-x+u(u^2+x^2-1),$$

$$\frac{dx}{dt}=u+x(u^2+x^2-1).$$

自动扩张到复系统

$$\frac{dw}{dT} = -z + w(w^2 + z^2 - 1),$$

$$\frac{dz}{dT} = w + z(w^2 + z^2 - 1).$$

它们有复域中的通解.

$$(w^2 + z^2 - 1)(w + iz)^{-1+i}(w - iz)^{-1-i} = \text{常数}.$$

这里有三张曲面

$$w^2 + z^2 - 1 = 0, \quad w + iz = 0, \quad w - iz = 0,$$

和三个奇点

$$(w:z:1) = (0:0:1), \quad (1, i, 0), \quad (1, -i, 0).$$

后两点在无穷远处.可以看出,过每个奇点有上述三张曲面中的两张,上述三张曲面中,每一张上有两个奇点,形成一个三面形.这三张曲面都是孤立极限曲面,其定义如下:对于一个积分曲面 $\mathscr{F}$,及其附近的积分曲面 $\mathscr{G}'$,如有 $\overline{\mathscr{G}'}\supset\mathscr{G}$ 但 $\overline{\mathscr{G}}\not\supset\mathscr{G}'$,则称 $\mathscr{F}$ 为"孤立极限积分曲面".这样,可以看到,实极限环 $u^2 + x^2 = 1$ 原来是复域中的孤立极限积分曲面 $w^2 + z^2 = 1$ 与实平面 $y = v = 0$ 相截的痕迹.这张孤立极限积分曲面 $w^2 + z^2 = 1$ 过无限远处的两个奇点 $(w:z:1) = (1:\pm i:0)$,从这无限远处的奇点,算出这张孤立极限积分曲面,则可以追回到实平面上的极限环.

关于复域的定性理论,已开始系统的研究.在奇点方面,对于

$$\frac{dw}{dT} = \alpha w + \beta z, \quad \frac{dz}{dT} = \gamma w + \delta z,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

其两特征根 λ_1 及 λ_2，可定义一示性数

$$\Lambda = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

可以由 Λ 之值来判定奇点 $w = z = 0$ 附近积分曲面分布的拓扑结构.具体地，有下面的分类及判定关系：

类　　型	解析判据	积分曲面族的拓扑结构	
		过奇点的积分曲面	孤立极限积分曲面
焦　点　型	$\mathrm{Im}(\Lambda) \neq 0$	所有的积分曲面	有且只有两张
结　点　型	$\mathrm{Im}(\Lambda) = 0$ $\mathrm{Re}(\Lambda) < 0$	所有的积分曲面	没　　　有
中心鞍点型	$\mathrm{Im}(\Lambda) = 0$ $\mathrm{Re}(\Lambda) > 0$	有且只有两张	没　　　有

高次项对于奇点附近的积分曲面的拓扑结构的影响如下表：

类　　型	解析判据	积分曲面族的拓扑结构	
		过奇点的积分曲面	孤立极限积分曲面
焦点型	$\mathrm{Im}(\Lambda) \neq 0$	所有的积分曲面	有且只有两张
结点型	$\mathrm{Im}(\Lambda) = 0$ $\mathrm{Re}(\Lambda) < 0$ $\mathrm{Re}(\Lambda) \neq -1$	所有的积分曲面	没　有
临界型	$\mathrm{Im}(\Lambda) = 0$ $\mathrm{Re}(\Lambda) > 0$	至少有两张	由高次项决定

临界型包括中心及焦点的判定，例如：

$$\frac{dw}{dT}=z+w(w^2+z^2),\quad \frac{dz}{dT}=-w+z(w^2+z^2),$$

则有

$$\Lambda=+1>0.$$

其通积分为

$$\left(\frac{w+iz}{w-iz}\right)^{-i}e^{-\frac{1}{(w+iz)(w-iz)}}=常数.$$

则 $w+iz=0$ 及 $w-iz=0$ 是两张孤立极限积分曲面.这是一个高阶焦点.

关于焦点及中心的判定,后面还会谈到.

复域中的孤立奇点,也可以定义指数. 其方法如下:取 $T=t$ 为实数,则方程组

$$\frac{dw}{dt}=\alpha w+\beta z,$$

$$\frac{dz}{dt}=\gamma w+\delta z$$

(其中 $q=\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$)

可分为 (u, v, x, y) 空间中的四个实方程,也就定义了一个实向量场;这个实向量场的指数,即这个复域方程的孤立奇点的指数.

实域中,对于孤立奇点,$q\neq0$ 时,有

$$I(P)=\begin{cases}+1, & 当\ q>0\ 时;\\ -1, & 当\ q<0\ 时.\end{cases}$$

复域中,对于孤立奇点,$q\neq0$ 时有

$$I(P)=+1.$$

这是很有规律的,即记录奇点的个数.

当 $q=0$ 时,$I(p)$可能大于1,即记录奇点个数的总和.

复域中所有的积分曲面或到奇点或到无限远处，这是实域中没有的性质.利用这种性质，可以研究积分曲面族的拓扑性质.

当然，四维空间，眼已看不见.但是，我们还是可以利用计算机进行追踪.

计算机的出现，对于常微分方程是一个极大的促进.

首先，欧拉折线法近似求解常微分方程已有了工具.对于一般的工程技术问题，不论其多么复杂，已经可以有一种初步的攻击工具，不致因其非线性而无所作为.例如登月轨线的选取.

其次，对于若干非线性方程的定性行为，也可以得到初步的概念.例如，对于一个典型的方程：洛伦兹(**H. A. Lorentz**)方程

$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x),$$

$$\frac{dy}{dt}=rx-y-xz,$$

$$\frac{dz}{dt}=-bz+xy.$$

(其中 $\sigma>0$, $r>0$, $b>0$.) 这是气象模型的一个简化方程，它吸引了许多人的研究，其中包括用计算机对于各种参数组 (σ, r, b) 的定性行为的研究. 在此基础上，人们证明了许多有意义的结果.

最后还应提到利用计算机来进行准确的公式推导的工作.典型的例子是，利用计算机求中心与焦点的判定.

例如，含有 7 个独立参数的方程组 (E_2)

$$\frac{dx}{dt}=y+L_1x+(L_7-L_6)x^2+2(-L_2+L_4+L_6)xy+L_6y^2,$$

$$\frac{dy}{dt}=-x+L_1x+L_4x^2+2(L_3+L_6-L_7)xy+(-L_4+L_2)y^2.$$

这里有七个独立参数 L_j(其中 $j=1, 2, \cdots, 7$). 判定它是中心或焦点的一般方法，庞卡勒在一百年前已给出. 但具体结果，到1952年才有六个参数的判据，那是利用座标旋转省去一个参数后算出的. 即使如此，由于计算量太大，最近发现还算错了符号. 最后归结为四个指标 V_1, V_3, V_5, V_7. 如果全为零，则为中心；如果不全为零，则为焦点. 第一个不为零的指标的符号决定稳定性：正号表示不稳定，负号表示稳定. 除一个正数因子外，用计算机推出精确的公式为

$$V_1=L_1;$$

$$V_3|_{V_1=0}=L_2L_3-L_6L_7;$$

$V_5|_{V_1=V_3=0}=$(14 项)如下表所示；

项数	系数	方次						
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	5		2			1	1	
2	-15		2				1	1
3	15		1		1		1	1
4	-2		1			1	2	
5	16						2	1
6	2			2	1			1
7	6			1		1	1	1
8	-16			1			1	2
9	-5			1	1			2
10	4			2			1	1
11	-6				1		2	1
12	-15					1	1	2
13	-4						3	1
14	15						1	3

$\dot{V}_7|_{V_1=V_3=V_6=0}$ = (43 项)如下表所示；

项数	系 数	方次						
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
1	30		1		2	1	2	
2	-90		1		2		2	1
3	12		1		1	1	3	
4	-36		1		1		3	1
5	190		1			2	2	1
6	30		1			3	2	
7	-725		1			1	2	2
8	-345		1				2	3
9	-30			2	3			1
10	-90			1	2	1	1	1
11	90			1	2		1	2
12	-336			1	1	1	2	1
13	-72			2	2		1	1
14	48			1	1		2	2
15	-115			2	1			3
16	-30			2	1	2		1
17	100			3	1	1		1
18	-4			3	1			2
19	-84			2	1		2	1
20	20			4	1			1
21	-90			1		3	1	1
22	-750			1		2	1	2
23	240			2		2	1	1
24	495			1		1	1	3
25	-872			2		1	1	2
26	260			3		1	1	1
27	-220			1		1	3	1
28	68			1			3	2
29	345			1			1	4
30	-218			2			1	3
31	-68			3			1	2
32	-40			2			3	1

续 表

项数	系 数	方			次			
		L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7
33	-280			2	1	1		2
34	40			4			1	1
35	90				3		2	1
36	96				2		3	1
37	90				1	2	2	1
38	24				1		4	1
39	345				1		2	3
40	840				1	1	2	2
41	-40					2	3	1
42	864					1	3	2
43	218						3	3

$V_j|_{V_1=V_3=V_5=V_7}=0$，当 $j>7$.

上面这些计算，是在计算机上完成的．用人手计算，需要数十年，并且出一点错，即全功尽弃．由此可见，即使方法已有，没有工具，具体结果也是得不出的．